УДК 681.142.2

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ В. М. ГЛУШКОВА В МЕТРОЛОГІЇ

Оксана Гладківська
Науково-дослідний центр правової інформатики АПрН України

Анотація: **Дається опис інтегральних динамічних моделей В. М. Глушкова, які можна використовувати для моделювання деяких структурних елементів вимірювання. Наведено алгоритми розв'язку задачі ідентифікації цих моделей.**

Summary: **The inventory of integrated models of V. Glushkov which can be used for modelling some structural elements of measurement is given. It is resulted algorithms of the decision of a task identification of these models.**

Ключові слова: **Засоби вимірювальної техніки, динамічна характеристика, інтегральні динамічні моделі В. М. Глушкова, ідентифікація, узагальнені функції, повна ортонормована система.**

I Вступ

Серед апарату моделювання складних систем значний інтерес представляє клас інтегральних динамічних моделей, розроблений академіком В.М.Глушковим та його учнями [1, 2]. Ці моделі знайшли широке застосування при моделюванні систем, що розвиваються, а саме економічних, технічних, біологічних, екологічних та соціальних, окремих галузей і підприємств, наукових організацій, обчислювальних центрів і т.п. Розглянемо можливість застосування динамічних моделей В.М.Глушкова в системах моніторингу (СМ) для забезпечення захисту інформації на об'єктах інформаційної діяльності (ОІД). Як вказано в [3], основними структурними елементами вимірювання є: мета, об'єкт дослідження, та його модель, апріорна інформація, вимірювана величина, засіб вимірювання, результат і похибка вимірювання. Використання вказаних моделей можливе, по-перше, для моделювання одного із основних структурних елементів вимірювання - ОІД. По-друге, їх слід використати у випадку, якщо режим роботи СМ є динамічним, тобто перетворювана величина є функцією часу, процесом, а сам вимірювальний засіб СМ трактується як динамічна система [4]. Тоді перетворення вхідного сигналу $u(t)$ у вихідний сигнал $x(t)$ записується символічно у вигляді $x(t) = Au(t)$, де A - оператор динамічної системи, що визначається її структурою та параметрами.

Питання побудови математичних моделей різних процесів на ОІД тісно пов'язані з задачами ідентифікації як задачами визначення (оцінювання) параметрів і структури об'єктів за результатами експериментальних досліджень. Мета даної статті – опис інтегральних динамічних моделей В.М.Глушкова, які пропонується використати в метрології системи технічного захисту інформації (ТЗІ) для моделювання структурних елементів вимірювання, та опис алгоритмів знаходження деяких параметрів моделі, фізичний зміст яких – показники ефективності функціонування системи.

II Про клас інтегральних динамічних моделей В.М.Глушкова

Пояснимо суть інтегральних динамічних моделей В.М.Глушкова, порівнявши їх з одним із класичних методів опису динамічних систем. Як відомо, довільну лінійну динамічну систему можна описати інтегральною динамічною моделлю, що визначає взаємозв'язок входу $u(t)$ і виходу $x(t)$ системи співвідношенням [5]

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} K(\tau,t) \cdot u(\tau) \cdot d\tau, \quad (1)$$

де $K(\tau,t)$ - імпульсна перехідна функція системи (ядро інтегрального рівняння). Якщо функція $K(\tau,t) \neq 0$ для всіх $t-\tau > 0$, то динамічна система має так звану нескінченну пам'ять. На практиці на вихід системи $x(t)$ впливають вхідні сигнали, моменти τ подачі яких відстають від t не більше ніж на деякий час $T > 0$, тобто $t-\tau \le T$. У цьому випадку маємо динамічну систему з так званою скінченною пам'яттю, для якої $K(\tau,t) \equiv 0$ при $t-\tau > T$, а модель (1) записуємо у вигляді

$$x(t) = \int_{t-T}^{t} K(\tau,t) \cdot u(\tau) \cdot d\tau. \quad (2)$$

У випадку не збудженої системи при $t \le 0$, для якої $u(\tau) \equiv 0$, $\tau \le 0$, модель (1) має вигляд:

$$x(t) = \int_0^t K(\tau,t) \cdot u(\tau) \cdot d\tau . \tag{3}$$

Якщо система стаціонарна (параметри не змінюються з часом), то її реакція на сигнал залежить тільки від часу $t - \tau$ після моменту подачі сигналу τ, і в даному випадку $K(\tau,t) = K(t - \tau)$.

Введемо функцію $a(t)$, значеннями якої є або 0, або ∞, або $t - T$ при $a(t) \le t$, і формально одержуємо один математичний запис моделей (1)-(3):

$$x(t) = \int_{a(t)}^t K(\tau,t) \cdot u(\tau) \cdot d\tau . \tag{4}$$

Таким чином, будь-яку лінійну динамічну систему можна описати інтегральною моделлю “вхід-вихід” (4). Така модель відноситься до непараметричних моделей, які використовують метод “чорного ящика”, тобто не враховують фізичну природу об’єкта моделювання і його структуру. Суттєвим недоліком цього підходу є складність визначення функції $K(\tau,t)$.

Якщо структурні зв’язки між вхідними і вихідними сигналами лінійної системи задані лінійною залежністю $u(\tau) = Y(\tau) \cdot x(\tau) + u_0(\tau)$, причому типи та інтенсивності зв’язків визначаються матрицею $Y(\tau)$, то замість моделі (4) одержимо таку неявну інтегральну динамічну модель з урахуванням структури:

$$x(t) = \int_{a(t)}^t K(\tau,t) \cdot Y(\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau + f(t), \tag{5}$$

де $f(t) = \int_{a(t)}^t K(\tau,t) \cdot u_0(\tau) \cdot d\tau$ - задана функція. Залежність (5) – це лінійне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно вихідного сигналу $x(t)$, його розв’язання еквівалентне задачі визначення імпульсної перехідної функції в моделі (4).

Розглянемо важливі модифікації динамічних моделей, запропоновані на прикладі найпростішої двопродуктової моделі.

Будемо враховувати тільки дві загальні функції системи моделювання: перша (внутрішня), що забезпечує її існування, і друга (зовнішня), що є результатом її взаємодії з зовнішнім середовищем. Матеріальні носії першої функції назвемо продуктами першого (I) виду, другої - продуктами другого (II) виду. Об’єкт моделювання поділимо на дві підсистеми А і Б наступним чином: система А за допомогою одної частини раніше вироблених продуктів I виду створює продукти I виду, система Б за допомогою іншої частини раніше вироблених продуктів I виду створює продукти II виду.

Двопродуктова модель системи має вигляд:

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau,t) \cdot y(\tau) \cdot m(\tau) \cdot d\tau , \tag{6}$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(\tau,t) \cdot [1 - y(\tau)] \cdot m(\tau) \cdot d\tau , \tag{7}$$

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) \cdot d\tau , \quad P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) \cdot d\tau ,$$

$$C(t) = \int_0^t c(\tau) \cdot d\tau , \quad G(t) = \int_0^{a(t)} m(\tau) \cdot d\tau ,$$

$$0 \le y \le 1; \; 0 \le t_0 \le t; \; 0 \le a(t) < t; \; a(t_0) = 0; \; t, \tau \in [0, T],$$

де t_0 - початковий момент дослідження; $m(t)$ - швидкість створення нових продуктів I виду в момент t; $y(t)$ - доля продуктів I виду, що використовуються для створення продуктів I виду, в момент t;

$\alpha(\tau,t)$ - продуктивність створення продуктів І виду для виконання внутрішніх функцій системи; $c(t)$ - швидкість створення продуктів ІІ виду в момент t ; $a(t)$ - часова межа ліквідації застарілих продуктів І та ІІ виду (ніякі продукти, створені в момент $\tau < a(t)$, в момент t не використовуються); $1-y(t)$ - доля продуктів І виду, що використовуються для створення продуктів ІІ виду, в момент t; $\beta(\tau,t)$ - продуктивність створення продуктів І виду для виконання зовнішньої функції системи; $M(t)$ - загальна кількість продуктів І виду; $C(t)$ - кількість продуктів ІІ виду; $P(t)$ - кількість продуктів І виду, що функціонують в системі; $G(t)$ - кількість застарілих ресурсів, що вже не використовуються в системі для забезпечення виконання зовнішньої і внутрішньої функції; T - кінцевий момент дослідження.

Таким чином, для динамічних систем запропонована значна деталізація залежності виду (4). По-перше, шляхом уведення оберненого зв'язку виділена модель підсистеми відтворення та розвитку самої себе і системи в цілому. По-друге, ядро $K(\tau,t)$ вибирається у вигляді добутку $K = K_1 \cdot K_2$, де K_1 має фізичний зміст ефективності функціонування системи, а K_2 - інтенсивності використання ресурсів системи. Завдяки цьому в частковому випадку може бути одержана інтегральна динамічна модель виду (5). По-третє, результати функціонування системи розподілені на три групи – на внутрішні потреби, на зовнішню функцію та на застарілі ресурси.

Наведена модель - лінійна. У випадку нелінійної двопродуктової моделі маємо $\alpha = \alpha(\tau,t,m,a,y)$, $\beta = \beta(\tau,t,m,a,y)$, тобто функції α, β залежать не тільки від моментів часу τ , t , але й від функцій m, y , a,. В даному дослідженні обмежимось випадком лінійної двопродуктової моделі.

ІІІ Постановка задачі ідентифікації

Застосування інтегральних динамічних моделей до систем, що розвиваються, показало, що в розглядуваному класі моделей важливу роль відіграють показники ефективності функціонування системи, яку моделюють, тобто функції $\alpha(\tau,t)$, $\beta(\tau,t)$. При отриманні важливих результатів аналітичного та числового розв'язку інтегральних рівнянь, а також задач оптимізації припускають, що вказані функції відомі [1, 2]. Тому виникла необхідність розв'язання задачі ідентифікації динамічних моделей В.М.Глушкова в плані аналітичного та числового знаходження функцій типу $\alpha(\tau,t)$, $\beta(\tau,t)$. Актуальність дослідження випливає із важливості задач ідентифікації для вказаного класу моделей, які виникають в теорії і практиці моделювання складних систем в багатьох областях діяльності людини.

Для знаходження функції $\alpha(\tau,t)$ використовуємо відомий критерій оцінювання – оцінку математичного очікування квадрату різниці лівої та правої частин рівняння (6) моделі (аналогічно для функції $\beta(\tau,t)$ - рівняння (7)):

$$I(\alpha,t) = M^*\left[m(t) - \int_{a(t)}^{t} \alpha(\tau,t)\cdot y(\tau)\cdot m(\tau)\cdot d\tau\right]^2, \quad t \in [0,T].$$

Будемо вважати, що вхідні дані – випадкові нестаціонарні процеси і що експериментально задано p значень процесів $m(t)$, $c(t)$, $y(t)$, $a(t)$ для R ідентичних об'єктів на відрізку часу $[0,T]$: $m_i(t_j)$, $c_i(t_j)$, $y_i(t_j)$, $a_i(t_j)$, $i=\overline{1,R}$, $j=\overline{1,p}$. Виходячи із можливостей застосування апріорної інформації та враховуючи факт, що математичне очікування у нестаціонарному випадку знаходиться як середнє сукупності реалізацій (у нашому випадку – R ідентичних об'єктів, для яких наявні вхідні дані), задачу ідентифікації записуємо у наступному вигляді:

$$I(\alpha,t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t) - \int_{a_i(t)}^{t} \alpha(\tau,t)\cdot y_i(\tau)\cdot m_i(\tau)\cdot d\tau\right]^2 \to \min_{\alpha}, \quad t \in [0,T]. \qquad (8)$$

Таким чином, дослідження зводиться до розв'язання задачі (8) на заданому класі функцій $\alpha(\tau,t)$.

Складнішою є задача, коли значення $a_i(t)$, $i=\overline{1,R}$, невідомі. Якщо задана функція $G(t)$, то ці значення можна знайти із рівняння моделі

$$G_i(t) = \int_0^{a_i(t)} m_i(\tau)\cdot d\tau \,,\; i=\overline{1,R}\,,\; t\in[0,T]\,.$$

Для розв'язання поставленої задачі ідентифікації (8) використовуємо метод найменших квадратів у просторі L_2 . Цей метод вибрано у зв'язку з тим, що його можна застосовувати до моделі, нічого не знаючи про розподіл ймовірностей спостережень. Важливою перевагою методу найменших квадратів є також лінійність задач відносно невідомих параметрів.

IV Методи розв'язання задачі ідентифікації

Використання методу найменших квадратів полягає у наступному.

Якщо вхідні дані – гладкі функції, то функцію $\alpha(\tau,t)$ апроксимуємо многочленом

$$\alpha(\tau,t) \approx \alpha_n(\tau,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \varphi_k(\tau)\cdot \psi_k(t)\,, \tag{9}$$

де c_k - невідомі коефіцієнти; $\varphi_k(\tau)$, $\psi_k(t)$ - задані координатні функції з простору L_2; $\tau,t\in[0,T]$; $k=\overline{1,n}$.

Підставляємо значення (9) функції $\alpha(\tau,t)$ в (8) , одержуємо для кожного $t\in[0,T]$:

$$I(\alpha_n,t) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k\cdot \xi_{ik}(t)\right]^2 \to \min_{c_k}\,,$$

де $\xi_{ik}(t) = \psi_k(t)\cdot \int_{a_i(t)}^{t} \varphi_k(\tau)\cdot y_i(\tau)\cdot m_i(\tau)\cdot d\tau\,,\; k=\overline{1,n}\,.$

Невідомі коефіцієнти c_k, $k=\overline{1,n}$ (для кожного заданого $t\in[0,T]$) будемо знаходити шляхом мінімізації критерію $I(\alpha_n,t)$. Задача ідентифікації зводиться до розв'язку нормальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку n :

$$\big(m(t),\xi_s(t)\big) = \sum_{k=1}^{n} c_k\cdot\big(\xi_k(t),\xi_s(t)\big),\;\; s=\overline{1,n}\,,$$

де $\big(m(t),\xi_s(t)\big) = \sum_{i=1}^{R} m_i(t)\cdot\xi_{is}(t)$; $\big(\xi_k(t),\xi_s(t)\big) = \sum_{i=1}^{R}\xi_{ik}(t)\cdot\xi_{is}(t)$; $k=\overline{1,n}$; $s=\overline{1,n}$.

В роботах [6, 7] одержано оцінки мінімуму критерію $I(\alpha,t)$ та функціонала $\hat I(\alpha) = \frac{1}{T}\int_0^T I\;(\alpha,t)\cdot dt$ для деяких класів диференційованих функцій α . Знайдено також теоретичні оцінки мінімуму критерію $I\;(\alpha,t)$ з врахуванням обмеження $\alpha\ge 0$, яке випливає із фізичного змісту функції $\alpha(\tau,t)$ як показника ефективності.

Щоб використати метод найменших квадратів у випадку, якщо вхідні дані – розривні функції, то невідомі характеристики типу $\alpha(\tau,t)$ доцільно апроксимувати узагальненими функціями. Так як в математичній моделі функція $\alpha(\tau,t)$ входить під знак інтеграла, то будемо знаходити її в класі узагальнених функцій по одній змінній τ . Дослідження проводились для негативного простору W^{-1} [6, 8], зокрема, в цьому просторі побудовано повну ортонормовану систему $\left\{\widetilde{e}_k^{(n)}(\tau)\right\}$, $k=\overline{1,n}$, яка має вигляд:

$$\widetilde{e}_1^{(n)}(\tau) = \frac{\delta(\tau-\tau_1^{(n)})}{\sqrt{T-\tau_1^{(n)}}}\,;$$

$$\tilde{e}_k^{(n)}(\tau) = \frac{\sqrt{T-\tau_{k-1}^{(n)}}\cdot\delta(\tau-\tau_k^{(n)})}{\sqrt{(T-\tau_k^{(n)})\cdot(\tau_k^{(n)}-\tau_{k-1}^{(n)})}} - \frac{\sqrt{T-\tau_k^{(n)}}\cdot\delta(\tau-\tau_{k-1}^{(n)})}{\sqrt{(T-\tau_{k-1}^{(n)})\cdot(\tau_k^{(n)}-\tau_{k-1}^{(n)})}};\ k=2,3,...;$$

де δ - позначення дельта-функції; $n = 1,2,...$; k, n - взаємно прості числа; $\tau_k^{(n)} = \frac{kT}{n}$, $k = \overline{0,n}$.

Ця система використовується для апроксимації ядра $\alpha(\tau,t)$ рівняння (6) у вигляді $\tilde{\alpha}_n(\tau,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \tilde{e}_k^{(n)}(\tau)\cdot\psi_k(t)$ і для теоретичної оцінки критерію (8), що виражається в даному випадку через інтегральний модуль неперервності функції з простору L_2.

Розглянемо інший метод розв'язання задачі ідентифікації (8), в якому теж використовується метод найменших квадратів і який зводиться до знаходження функції двох змінних, заданої у вигляді таблиці.

Розіб'ємо інтервал $[0,T]$ на підінтервали $[t_{k-1},t_k]$ різної довжини Δt_k, $k=\overline{1,p}$, так, що $0 = t_0$, $T = t_p$, $a(t_k) = t_{k(a)}$, $\tilde{T} = t_{k'}$, де $\tilde{T}$ - момент часу, коли починається ліквідація застарілих продуктів (для $k = \overline{1,k'-1}$ $t_{k(a)} = 0$). Будемо вважати, що на кожному малому інтервалі $[t_{k-1},t_k]$ підінтегральна функція дорівнює її значенню в точці t_k, $k=\overline{1,p}$.

Записуємо критерій (8) для кожного $t_k \in [0,T]$, $k=\overline{1,p}$:

$$I(\alpha,t_k) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t_k) - \int_{a_i(t_k)}^{t_k}\alpha(\tau,t_k)\cdot y_i(\tau)\cdot m_i(\tau)\cdot d\tau\right]^2.$$

Для простоти викладення припустимо, що $a_i(t_k) = a(t_k)$, та введемо позначення $\tilde{\alpha}_{sk} = \int_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(\tau,t_k)\cdot d\tau$; $s = \overline{k(a)+1,k}$; $k=\overline{1,p}$; $i=\overline{1,R}$. Тоді одержуємо остаточний вираз для критерію $I(\alpha,t_k)$:

$$I(\alpha,t_k) \approx \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t_k) - \sum_{s=k(a)+1}^{k}(t_s - t_{s-1})\cdot y_i(t_s)\cdot m_i(t_s)\cdot\tilde{\alpha}_{sk}\right]^2. \tag{10}$$

Аналогічно попередньому, невідомі коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{sk}$; $s=\overline{k(a)+1,k}$; $k=\overline{1,p}$ будемо знаходити за допомогою методу найменших квадратів, мінімізуючи по $\tilde{\alpha}_{sk}$ критерій (10). Розв'язавши нормальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо значення функції двох змінних, що задана таблицею. Максимальна розмірність прямокутної числової матриці обчислених значень складає $(p-1)\times(p-1)$. За обчисленими значеннями $\tilde{\alpha}_{sk} = \int_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(\tau,t_k)\cdot d\tau$, $s=\overline{k(a)+1,k}$; $k=\overline{1,p}$ знайдемо і значення невідомої характеристики $\alpha(\tau,t)$ моделі.

У роботі [9] описано ще один метод ідентифікації, який базується на агрегуванні і дезагрегуванні системи (випадок нелінійних моделей).

Висновки

Наведено приклад інтегральних динамічних моделей В.М.Глушкова, які пропонується використовувати в метрології ТЗІ для моделювання одного із основних структурних елементів вимірювання - об'єкта дослідження, або засобу вимірювальної техніки у випадку, якщо режим його роботи є динамічним. Дається постановка задачі ідентифікації динамічних моделей В.М.Глушкова, що полягає в знаходженні функцій типу $\alpha(\tau,t)$, $\beta(\tau,t)$, фізичний зміст яких – показники ефективності функціонування системи, яку моделюють. Запропоновано методи розв'язання задачі ідентифікації, основані на використанні методу найменших квадратів. Одержані автором результати представляють інтерес в теорії апроксимації функцій (а саме приклад повної ортонормованої системи в негативному просторі), в теорії ідентифікації систем та теоретичній метрології.

Наведено приклад математичної моделі на теоретичному рівні. Це є першим кроком на шляху до використання динамічних моделей В.М.Глушкова в метрології ТЗІ для моделювання окремих структурних елементів вимірювання, а також до одержання результатів на практиці, зокрема числових значень показників ефективності функціонування та інших параметрів моделі чи системи.

Література: ***1.*** *Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. - М.: Наука, 1983. – 352 с.* ***2.*** *Viktor V. Ivanov. Model Development and Optimization. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.* ***3.*** *Боднарчук О. О. Метрологія. Елементи теорії вимірювань. – Чернівці: Рута, 2000. – 24 с.* ***4****. Поліщук Є. С., Дорожовець М. М., Яцук В. О. та ін. Метрологія та вимірювальна техніка. – Львів: Бескид Біт, 2003. – 544 с.* ***5.*** *Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974. 336 с.* ***6.*** *Гладкивская О. В. Исследование задач идентификации для одного класса динамических моделей: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.16 / Киевский гос. университет им. Т. Г. Шевченко. - Киев, 1990. – 15 с.* ***7.*** *Гладківська О. Задачі ідентифікації динамічних моделей В. М. Глушкова. // правова інформатика. – 2003. - № 1. – С. 18 - 22.* ***8.*** *Гладківська О. В. Приклад повної ортонормованої системи в гільбертовому просторі узагальнених функцій // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49, № 5. – С. 725 - 728.* ***9.*** *Гладківська О.В. Метод ідентифікації нелінійних моделей інформаційно-вимірювальних систем // Контрольно-вимірювальна техніка. 1984. Вип. 52. – С. 103 - 109.*